第1.1节

- 随机过程的概念
- 随机过程的定义
- 参考资料

随机过程是什么?

- 什么是随机过程?
- 与概率论这门课的区别是什么?
- 随机过程的例子有哪些?

随机过程是什么？

- **概率论：** 研究随机现象及其统计规律性

- **随机过程：** 研究一族随机变量相互之间关系

随机过程的定义

定义：设(Ω, Σ, P)是一概率空间，对每一个参数$t \in T$，$X(t,\omega)$是一定义在概率空间(Ω, Σ, P)上的随机变量，则称随机变量族$X_T = \{X(t,\omega); t \in T\}$为该概率空间上的一随机过程。其中$T \subset R$是一实数集，称为指标集或参数集。

- Ω: 样本空间： 随机现象所有可能的结果构成的空间
- Σ: σ-代数：样本空间某些子集构成的集合，要满足一些数学上的条件
- P: 概率测度： Σ域上的集函数，值域是落在[0,1]上的
- t： 索引参数：代表时间或空间…
- ω： 样本点：代表随机试验的一个基本结果，它是样本空间 Ω 中的一个元素
- 随机变量族：所有的随机变量构成的集合
- T： 指标集，或称作参数集

随机过程的定义

随机过程的两种描述方法：

用映射表示 X_T，

$$X(t,\omega):\ T\times\Omega\to R$$

即 $X(\cdot,\cdot)$ 是一定义在 $T\times\Omega$ 上的二元单值函数，固定 $t\in T$， $X(t,\cdot)$ 是一定义在样本空间 Ω 上的函数，即为一随机变量；对于固定的 $\omega\in\Omega$， $X(\cdot,\omega)$ 是一个关于参数 $t\in T$ 的函数，通常称为样本函数，或称随机过程的一次实现，所有样本函数的集合确定一随机过程。记号 $X(t,\omega)$ 有时记为 $X_t(\omega)$ 或简记为 $X(t)$。

随机过程的定义

参数T一般表示时间或空间。常用的参数一般有：（1）$T=N_0=\{0,1,2,\cdots\}$；（2）$T=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$；（3）$T=[a,b]$，其中a可以取0或$-\infty$，b可以取$+\infty$。

当参数取可列集时，一般称随机过程为随机序列。

随机过程的定义

随机过程$\{X(t);t\in T\}$可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作S。S中的元素称为状态。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。

随机过程的定义

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为$\Omega=\{H,T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现H时}\\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases}\qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中$P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

	出现H	出现T
$X(t)$	$\cos\pi t$	$2t$

随机过程的定义

例 **2**：设

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

其中 A 和 ω 是正常数，$\theta \sim U(0, 2\pi)$。试考察其样本函数和状态空间。

固定$\theta = 0$:

$X(t) = A cos(\omega t)$

固定$t = 0$:

$X(\mathrm{t}) = A\cos(\theta)$

随机过程的定义

例 3：设正弦随机过程$\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$，其中：$X(t) = A\cos\omega t$， ω 是常数，$A \sim U[0, 1]$。试求：（1）画出$X(t)$的样本函数；（2）确定过程的状态空间；（3）求$t = 0, \pi/4\omega, 3\pi/4\omega, \pi/\omega, \pi/2\omega$ 时$X(t_k)$的密度函数。

t_k	0	$\pi/4\omega$	$3\pi/4\omega$	π/ω	$\pi/2\omega$
$X(t_k)$	A	$\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$-A$	0

$$f_{X(\pi/4\omega)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

随机过程的定义

例 **4**：质点在直线上的随机游动，令 X_n 为质点在 n 时刻时所处的位置，试考察其样本函数和状态空间。

随机过程的定义

例 **5**：考察某“服务站”在$[0,t]$时间内到达的“顾客”数，记为$N(t)$，则$\{N(t),t\geq 0\}$是一随机过程，试考察其样本函数和状态空间。若记S_n为第n个“顾客”到达的时刻，则$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$为一随机序列，我们自然要关心$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$的情况以及它与随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$的关系，这时要将两个随机过程作为一个整体来研究其概率特性（统计特性）。

随机过程的定义

例 6： 布朗运动。

参考资料

- 《随机过程及其应用》——陆大金、张颢
- 《随机过程 》——Sheldon M. Ross
- 《应用随机过程 概率模型导论》——Sheldon M. Ross
- 《Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering, 3rd》——Alberto Leon-Garcia
- 《概率、随机变量与随机过程》—— （美）帕普里斯，（美）佩莱 著，保铮，冯大政 等译
- 《 Probability, Random Variables and Stochastic Processes 》——Athanasios Papoulis, S. Unnikrishna Pillai

第1.2节

- ➢随机过程的分类
- ➢随机过程的数字特征

随机过程的分类

以参数集T的性质，随机过程可分为两大类：（1）T可列；（2）T不可列。

以状态空间S的性质，即$X(t)$所取的值的特征，随机过程也可以分为两大类：（1）离散状态，即$X(t)$所取的值是离散的；（2）连续状态，即$X(t)$所取的值是连续的。

由此可将随机过程分为以下四类：

（a） 离散参数离散型随机过程； 例4：随机游走

（b） 连续参数离散型随机过程； 例5：服务站

（c） 连续参数连续型随机过程； 例3、布朗运动

（d） 离散参数连续型随机过程。 随机序列分析

随机过程的分类

- 以随机过程的统计特征或概率特征分类
  - 独立增量过程
  - Markov 过程
  - 二阶矩过程
  - 平稳过程
  - 鞅（Martingale)
  - 更新过程
  - Poission 过程
  - 维纳过程

随机过程的分类

◻ 以随机过程的统计特征或概率特征分类

- 独立增量过程
- Markov 过程
- 二阶矩过程
- 平稳过程
- 鞅（Martingale)
- 更新过程
- Poission 过程
- 维纳过程

时间有个增量，X(t)也有一个增量；

$X(t_2)-X(t_1),\dots,X(t_k)-X(t_{k-1})$相互独立。

随机过程的分类

- 以随机过程的统计特征或概率特征分类
  - 独立增量过程
  - Markov 过程
  - 二阶矩过程
  - 平稳过程
  - 鞅（Martingale）
  - 更新过程
  - Poission 过程
  - 维纳过程

> - 随机过程将来的变化规律跟过去是没有关系，只跟现在有关。
> - 一个随机过程满足无后效性，或者说满足Markov性，称这个随机过程为Markov过程。

随机过程的分类

◻ 以随机过程的统计特征或概率特征分类

- 独立增量过程
- Markov 过程
- 二阶矩过程
- 平稳过程
- 鞅（Martingale)
- 更新过程
- Poission 过程
- 维纳过程

> - 二阶矩是比较简单的随机过程
> - 如果$X(t)$的二阶矩存在，则称作二阶矩过程
> - $\forall\, t \in T, E[X^2(t)] < \infty$

随机过程的分类

- 以随机过程的统计特征或概率特征分类
  - 独立增量过程
  - Markov 过程
  - 二阶矩过程
  - 平稳过程
  - 鞅（Martingale）
  - 更新过程
  - Poission 过程
  - 维纳过程

> - 其主要的统计特性不会随时间推移而改变
> - 严平稳：有限维联合概率分布不随时间改变
> - 宽平稳随机过程：
>   1. 均值函数是一个常数
>   2. 相关函数只跟“时间差” 有关
>   3. 是二阶矩过程

随机过程的分类

◘ 以随机过程的统计特征或概率特征分类

- 独立增量过程
- Markov 过程
- 二阶矩过程
- 平稳过程
- 鞅（Martingale）
- 更新过程
- Poission 过程
- 维纳过程

> ➢ 主要用在金融领域
> ➢ 鞅是满足如下条件的随机过程：在已知过程在s时刻之前的变化规律的条件下，过程在将来某一时刻t的期望值等于过程在s时刻的值。

随机过程的分类

◻ 以随机过程的统计特征或概率特征分类

- 独立增量过程
- Markov 过程
- 二阶矩过程
- 平稳过程
- 鞅（Martingale)
- 更新过程
- Poission 过程
- 维纳过程

> ➢ 描述元件或设备更新现象的一类随机过程。
> ➢ 如果每次更新后元件的工作是**相互独立且有相同的寿命分布**,令$N(t)$为在区间$(0,t]$中的更新次数，则称计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$为更新过程。

随机过程的分类

◘ 以随机过程的统计特征或概率特征分类

- 独立增量过程
- Markov 过程
- 二阶矩过程
- 平稳过程
- 鞅（Martingale）
- 更新过程
- Poission 过程
- 维纳过程

> ➢ 是参数连续、状态离散的随机过程。
> ➢ 是计数过程、独立增量过程。
> ➢ 增量的概率分布是Poission分布。
> ➢ 服务台例子：顾客到达人数服从Poission分布，则称作泊松过程。

随机过程的分类

◻ 以随机过程的统计特征或概率特征分类

- 独立增量过程
- Markov 过程
- 二阶矩过程
- 平稳过程
- 鞅（Martingale)
- 更新过程
- Poission 过程
- 维纳过程

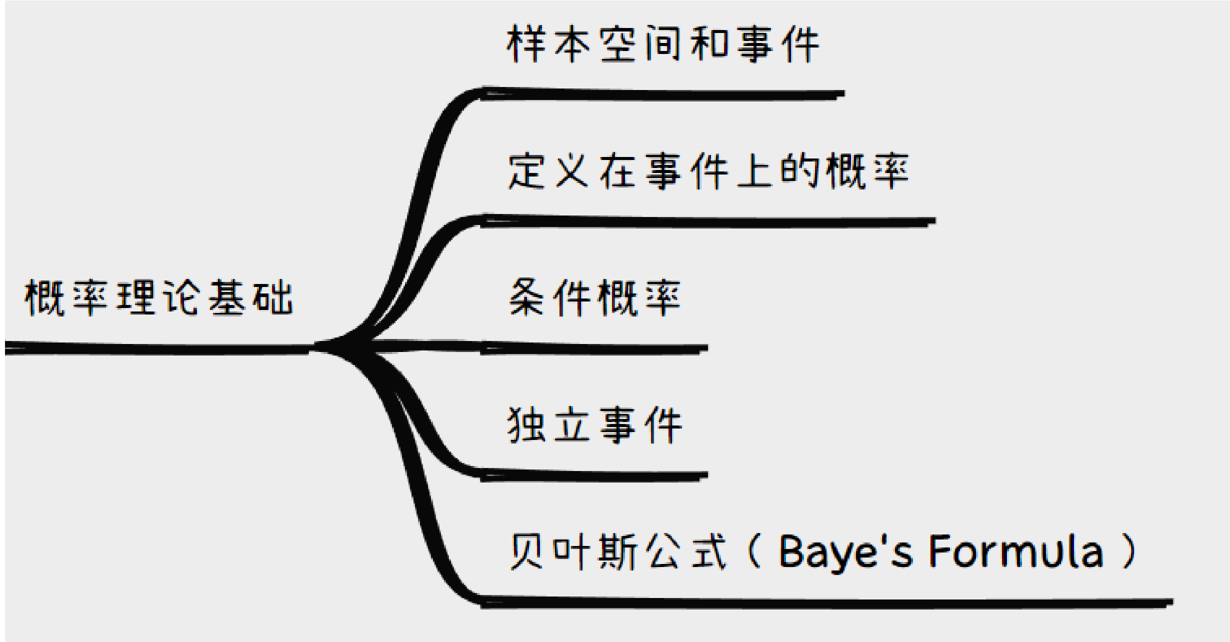
> - 也称作布朗运动
> - 是参数连续、状态也是连续的随机过程
> - 也是一种独立增量过程，具备马尔可夫性
> - 增量$X(s+t)-X(s)$是期望为0，方差为t的正态分布
> - 电子元件在恒温下的热噪声也可归结为维纳过程

随机过程的分类

注意：以上两种对随机过程的分类方法并不是独立的，比如，我们以后要讨论的 **Markov** 过程，就有参数离散状态空间离散的 **Markov** 过程，即 **Markov** 链，也要讨论参数连续状态离散的 **Markov** 过程，即纯不连续 **Markov** 过程。在下面几章中，我们将研究几种重要的、应用非常广泛的随机过程。

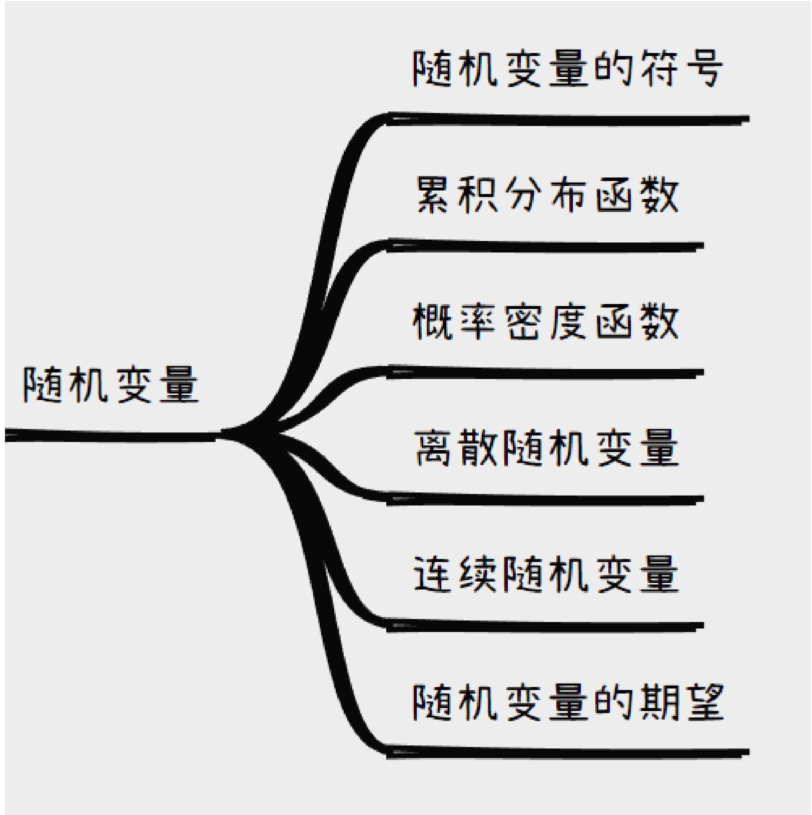
本课程学什么？

- 概率论基础



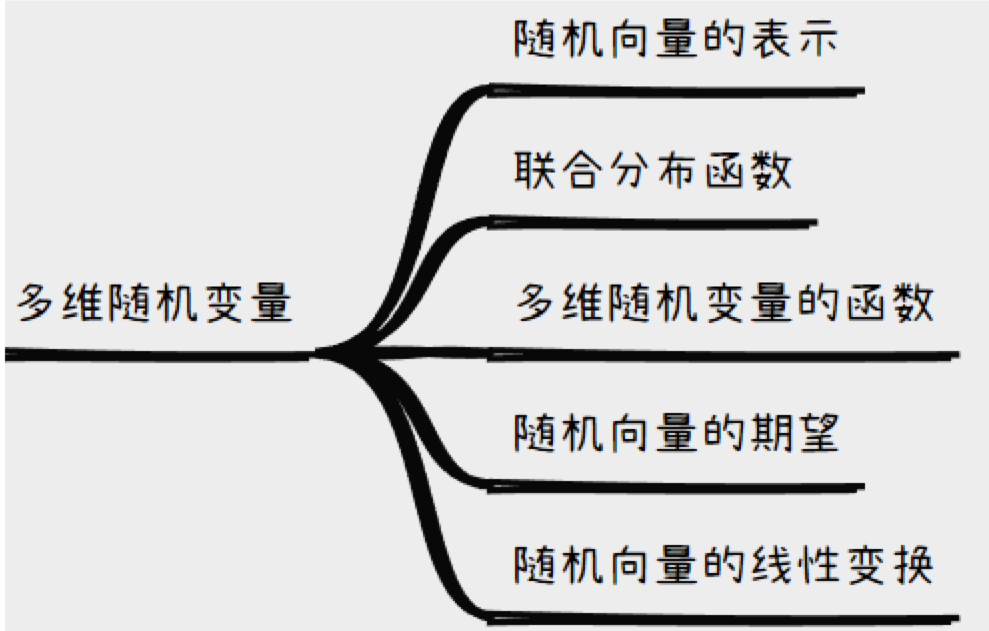
本课程学什么？

- 概率论基础
- 随机变量



本课程学什么？

- 概率论基础
- 随机变量



本课程学什么？

- 概率论基础
- 随机变量
- 随机过程的数字特征
- Markov过程
- Poission过程
- 二阶矩过程、平稳过程和随机分析
- 平稳过程的谱分析
- Gaussian过程

随机过程的数字特征

- 均值
- 方差
- （自）协方差
- （自）相关
- 特征函数

随机过程的数字特征

为什么要学数字特征?

概率密度f(x)往往是不知道的，服从什么分布你是不知道的。

不知道f(x)的时候：通过统计的方法得到数字特征。

通过数字特征来了解所研究的随机变量的性质。

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

设$\{X(t);t\in T\}$是一随机过程，为了刻画它的统计特征，通常要用到随机过程的数字特征，即随机过程的均值函数、方差函数、协方差函数和相关函数。下面我们给出它们的定义。

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

（**a**） 均值函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的均值函数定义为：（假设存在）

$$\mu_X(t)\hat{=}m(t)=E\{X(t)\}$$

说明：如果均值是∞，我们称这个X(t)的均值不存在。

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

（**b**） 方差函数：随机过程$\{X(t); t \in T\}$的方差函数定义为：（假设存在）

$$\sigma_X^2(t) \triangleq D_X(t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}$$

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

（c） （自）协方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的（自）协方差函数定义为：

$$C_X(s,t)\triangleq E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

（**d**）　（自）相关函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的（自）相关函数定义为：

$$R_X(s,t)\triangleq E\{X(s)X(t)\}$$

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

（e） 特征函数：记：

$$\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) \triangleq E\{\exp\{j[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]\}\}$$

称

$$\{\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n \in T, n\geq 1\}$$

为随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维特征函数族。

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

数字特征之间的关系：

$$C_X(s,t) \triangleq E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

$$= E\{X(s)X(t)\} - \mu_X(s)\cdot\mu_X(t)$$

$$= R_X(s,t) - \mu_X(s)\cdot\mu_X(t)$$

$$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = C_X(t,t) = R_X(t,t) - [\mu_X(t)]^2$$

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

例 7：考察上面的例 1，（1）写出 $X(t)$ 的一维分布列 $X(1/2), X(1)$；（2）写出 $X(t)$ 的二维分布列 $(X(1/2), X(1))$；（3）求该过程的均值函数和相关函数。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为 $\Omega=\{H,T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{当出现H时} \\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases} \qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 $P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

随机过程的数字特征

例 7：考察上面的例 1，（1）写出 $X(t)$ 的一维分布列 $X(1/2), X(1)$；（2）写出 $X(t)$ 的二维分布列 $(X(1/2), X(1))$；（3）求该过程的均值函数和相关函数。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为 $\Omega=\{H,T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现H时}\\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 $P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

（一）单个随机过程

解：

（1）

t	$X\left(\frac{1}{2}\right)$	$X(1)$
出现 H	0	-1
出现 T	1	2

$$F_{X(1/2)}(x)=P\{X(1/2)\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$F_{X(1)}(x)=P\{X(1)\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1/2, & -1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

随机过程的数字特征

例 7：考察上面的例 1，（1）写出 $X(t)$ 的一维分布列 $X(1/2), X(1)$；（2）写出 $X(t)$ 的二维分布列 $(X(1/2), X(1))$；（3）求该过程的均值函数和相关函数。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为 $\Omega=\{H,T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{当出现H时}\\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 $P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

（一）单个随机过程

（2）

联合概率质量函数：

$X(1)$ \ $X(1/2)$	0	1
-1	**1/2**	**0**
2	**0**	**1/2**

$$P\{X(1/2)=0, X(1)=-1\}$$

$$=P(\{X(1/2)=0\}\cap\{X(1)=-1\})$$

$$=P(\{H\}\cap\{H\})$$

$$=1/2$$

随机过程的数字特征

例 7：考察上面的例 1，（1）写出 $X(t)$ 的一维分布列 $X(1/2), X(1)$；（2）写出 $X(t)$ 的二维分布列 $(X(1/2), X(1))$；（3）求该过程的均值函数和相关函数。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为 $\Omega=\{H,T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现H时}\\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 $P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则 $\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

（一）单个随机过程

解：

（3）

$X(t)$	$\cos(\pi t)$	$2t$
P	$1/2$	$1/2$

均值函数：$\mu_X(t)=\frac{1}{2}\cos(\pi t)+t$

$X(t)$ \ $X(s)$	$\cos(\pi s)$	$2s$
$\cos(\pi t)$	$1/2$	0
$2t$	0	$1/2$

相关函数：

$$R_X(s,t)=\frac{1}{2}\cos\pi t\cos\pi s+2st$$

随机过程的数字特征

（一）单个随机过程

例 8： 求例 2 中随机过程的均值函数和相关函数。

例 2： 设

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

其中 A 和 ω 是正常数，$\theta \sim U(0, 2\pi)$。试考察其样本函数和状态空间。

随机过程的数字特征

例 8：求例 2 中随机过程的均值函数和相关函数。

例 2：设

$$X(t)=A\cos(\omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 A 和 ω 是正常数，$\theta\sim U(0,2\pi)$。试考察其样本函数和状态空间。

（一）单个随机过程

解:

$$f_\theta(\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<\alpha<2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\mu_X(t)=A\cdot E[\cos(\omega t+\theta)]$$

$$E[\cos(\omega t+\theta)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega t+\alpha)f_\theta(\alpha)d\alpha$$

将 $f_\theta(\alpha)$ 的定义代入:

$$E[\cos(\omega t+\theta)]=\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi}d\alpha$$

$$E[\cos(\omega t+\theta)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\alpha)d\alpha$$

$$=0$$

均值函数为 $\mu_X(t)=0$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$R_X(s,t)=E[A\cos(\omega s+\theta)\cdot A\cos(\omega t+\theta)]$$

$$R_X(s,t)=A^2E[\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)]$$

$$\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)=$$

$$\frac{1}{2}[\cos(\omega(s-t))+\cos(\omega(s+t)+2\theta)]$$

相关函数为 $R_X(s,t)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega(s-t))$

随机过程的数字特征

（二）两个随机过程

设$\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$是两个随机过程，它们具有相同的参数集，对于它们的数字特征，除了有它们自己的数字特征外，我们还有：

（**a**）　互协方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的互协方差函数定义为：

$$C_{XY}(s,t)\triangleq E\{[X(s)-\mu_X(s)][Y(t)-\mu_Y(t)]\}$$

随机过程的数字特征

（二）两个随机过程

（**b**）　互相关函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(s,t)\triangleq E\{X(s)Y(t)\}$$

随机过程的数字特征

（二）两个随机过程

互协方差函数和互相关函数有以下的关系：

$$C_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - \mu_X(s) \cdot \mu_Y(t)$$

随机过程的数字特征

（二）两个随机过程

如果两个随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$，对于任意的两个参数$s,t\in T$，有

$$C_{XY}(s,t)=0$$

或

$$R_{XY}(s,t)=\mu_X(s)\cdot\mu_Y(t)=E\{X(s)\}\cdot E\{Y(t)\}$$

则称随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$是统计不相关的或不相关的。

随机过程的数字特征

（三） 有限维分布族

设$\{X(t); t \in T\}$是一随机过程，对于$\forall n \in N$， $\forall t_i \in T\ (1 \le i \le n)$，记

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

其全体

$$\{F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \ge 1\}$$

称为随机过程$\{X(t); t \in T\}$的有限维分布族。它具有以下的性质：

随机过程的数字特征

（1） 对称性：对 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意排列 $(j_1, j_2,\cdots, j_n)$，则有：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F_X(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n})$$

（2） 相容性：对于 $m<n$，有：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)$$

$$=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m)$$

注 1：随机过程的统计特性完全由它的有限维分布族决定。

注 2：有限维分布族与有限维特征函数族相互唯一确定。

随机过程的数字特征

（四）两个随机过程的独立性

设$\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$是两个随机过程，它们具有相同的参数集，

任取$n,m\in N$，以及$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$t_1',t_2',\cdots,t_m'\in T$，则称$n+m$维随机向量

$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n),Y(t_1'),Y(t_2'),\cdots,Y(t_m'))$的联合分布函数：

$$F_{XY}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_n;t_1',t_2',\cdots,t_m')$$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n,Y(t_1')\le y_1,\cdots,Y(t_m')\le y_m\}$$

为随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的$n+m$维联合分布函数。

随机过程的数字特征

如果对于任取的$n,m\in N$，以及任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$t_1',t_2',\cdots,t_m'\in T$，

随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的联合分布函数满足：

$$
\begin{aligned}
&F_{XY}(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_n;t_1',t_2',\cdots,t_m')\\
&=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\cdot F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_n;t_1',t_2',\cdots,t_m')
\end{aligned}
$$

则称随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$是独立的。

注：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$独立可以得到随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$统计不相关，反之不对。但对于正态过程来说是等价的，这一点我们以后将看到。

第1.3节

- δ - 函数及离散型随机变量分布列的δ - 函数表示
- 条件数学期望

δ －函数及离散型随机变量分布列的δ －函数表示

（1）δ 一函数（**Dirac** 函数）的定义及性质

定义：对于任意的无穷次可微的函数 $f(t)$，如果满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)f(t)dt$$

其中：

$$\delta_{\varepsilon}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\le t\le\varepsilon\\ 0, & t>\varepsilon\end{cases}$$

则称 $\delta_{\varepsilon}(t)$ 的弱极限为 δ 一函数，记为 $\delta(t)$。

δ - 函数及离散型随机变量分布列的δ - 函数表示

显然，对于任意的$\varepsilon > 0$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\varepsilon}(t)dt = \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

注 1：$\delta(t)$在$t = 0$点的取值为∞，在$t \neq 0$点的取值为0，并且满足$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$。

注 2：工程（信号处理等）上δ—函数也称为单位脉冲函数或单位冲激函数。

δ - 函数及离散型随机变量分布列的δ - 函数表示

δ －函数的筛选性质：

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有：

$$\int_I \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

其中 I 是包含点 $t=0$ 的任意区间。特殊地，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

更一般地，我们有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

δ - 函数及离散型随机变量分布列的δ - 函数表示

（2）离散型随机变量分布列的δ－函数表示

设离散型随机变量X的分布列为：$P\{X=x_i\}=p_i \quad i=1,2,\cdots$，则由$\delta$－函数的筛选性质可以定义离散型随机变量$X$的分布密度（离散型分布密度）为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

因为，由δ－函数的筛选性质，离散型随机变量X的分布函数可以表示为：

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}p_i=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(u-x_i)du$$

注：工程上，常用离散型随机变量分布列的δ－函数表示法。它将离散型随机变量的分布列表示成分布密度的形式，因此与连续型随机变量的概率分布密度函数一样，可以进行统一处理。在下面的例子中我们将看到它的应用。

条件数学期望

条件数学期望是随机数学中最基本最重要的概念之一，它在随机过程课程中具有广泛的应用，需要同学们很好地掌握。

条件数学期望

如果 X 和 Y 都是离散的随机变量，那么对一切使 $P(Y=y)>0$ 的 y，在给定 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率质量函数定义为

$$P\{X=x \mid Y=y\}=\frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}.$$

给定 $Y=y$ 时，X 的条件分布函数定义为

$$F(x \mid y)=P\{X \leqslant x \mid Y=y\},$$

而给定 $Y=y$ 时，X 的条件期望定义为

$$E[X \mid Y=y]=\int x \mathrm{d} F(x \mid y)=\sum_{x} x P\{X=x \mid Y=y\}.$$

条件数学期望

如果 X 和 Y 有联合密度函数 $f(x,y)$，那么对于一切使 $f_Y(y)>0$ 的 y，在给定 $Y=y$ 时，X 的条件概率密度函数定义为

$$f(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

而在给定 $Y=y$ 时，X 的条件概率分布函数定义为

$$F(x \mid y)=P\{X \leqslant x \mid Y=y\}=\int_{-\infty}^{x} f(x \mid y)\mathrm{d}x.$$

在给定 $Y=y$ 时，X 的条件期望定义为

$$E[X \mid Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid y)\mathrm{d}x.$$

所以，现在除了概率都是对事件 $Y=y$ 的条件概率外，一切定义都和无条件情形一样.

条件数学期望

（1） 离散型情形

定义：设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值是(x_i,y_j)，其联合分布率为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\geq 0$，记：

$$E\{X|Y\}\triangleq\sum_j I_{(Y=y_j)}(\omega)E\{X|Y=y_j\}$$

称$E\{X|Y\}$为X关于Y的条件数学期望。

注 1：定义中的$I_{(Y=y_j)}(\omega)$是示性函数，即：

$$I_{(Y=y_j)}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\\ 0, & \omega\notin\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\end{cases}$$

条件数学期望

注 2：条件数学期望 $E\{X|Y\}$ 是随机变量 Y 的函数，因此有关于它的分布，

其分布为：

当 $E\{X|Y=y_j\} \neq E\{X|Y=y_k\}\ (j \neq k)$ 时，

$$P\{E\{X|Y\}=E\{X|Y=y_j\}\}=P\{Y=y_j\}$$

否则，令：$D_j=\{k: E\{X|Y=y_k\}=E\{X|Y=y_j\}\}$，则

$$P\{E\{X|Y\}=E\{X|Y=y_j\}\}=\sum_{k\in D_j} P\{Y=y_k\}$$

注 3：由于条件数学期望 $E\{X|Y\}$ 是随机变量 Y 的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X|Y\}\}=\sum E\{X|Y=y_j\}P\{Y=y_j\}=E\{X\}。$$

条件数学期望

例 9：离散型随机变量(X,Y)的联合分布率如下表所示，试求$E\{X|Y\}$的分布率，$E\{X\},E\{E\{X|Y\}\}$。

Y \ X	1	2	3	$p_{\bullet j}$
1	2/27	4/27	1/27	7/27
2	5/27	7/27	3/27	15/27
3	1/27	2/27	2/27	5/27
$p_{i\bullet}$	8/27	13/27	6/27	1

条件数学期望

例 9：离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布率如下表所示，试求 $E\{X|Y\}$ 的分布率，$E\{X\}, E\{E\{X|Y\}\}$。

Y \ X	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	2/27	4/27	1/27	7/27
2	5/27	7/27	3/27	15/27
3	1/27	2/27	2/27	5/27
$p_{i\cdot}$	8/27	13/27	6/27	1

解:

$$E\{X\} = (8 + 26 + 18)/27 = 52/27$$

$$E[X \mid Y = y] = \int x \mathrm{d}F(x \mid y) = \sum x P\{X = x \mid Y = y\}.$$

$$P\{X = x \mid Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}.$$

P{X=x | Y=y}:

Y \ X	1	2	3
1	2/7	4/7	1/7
2	1/3	7/15	1/5
3	1/5	2/5	2/5

E{X|Y}分布率：

$E[X\|Y=y]$	$P\{Y=y]\}$ 概率
13/7	$P\{Y=1\}=7/27$
28/15	$P\{Y=2\}=15/27$
11/5	$P\{Y=3\}=5/27$

根据全期望定律：$E\{E\{X \mid Y\}\} = \sum_j E\{X \mid Y = y_j\} P\{Y = y_j\}$

$$E\{E\{X \mid Y\}\} = (13/7) \cdot (7/27) + (28/15) \cdot (15/27) + (11/5) \cdot (5/27)$$
$$= (13 + 28 + 11)/27 = 52/27$$

条件数学期望

（2） 连续型情形

定义：设二维随机变量具有联合分布密度函数 $f(x,y)$， Y 的边缘分布为 $f_Y(y)$，若随机变量 $E\{X|Y\}$ 满足：

（a）$E\{X|Y\}$ 是随机变量 Y 的函数，当 $Y=y$ 时，它的取值为 $E\{X|Y=y\}$；

（b）对于任意的事件 D，有：

$$E\{E\{X|Y\}|Y\in D\}=E\{X|Y\in D\}$$

则称随机变量 $E\{X|Y\}$ 为 X 关于 Y 的条件数学期望。

注 1：由于条件数学期望 $E\{X|Y\}$ 是随机变量 Y 的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X|Y\}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)f_Y(y)dy=E\{X\}$$

条件数学期望

例 10：设：$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，则有：

$$E\{Y|X=x\} = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\} = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1)$$

条件数学期望

例 10：设：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，则有：

$$E\{Y|X=x\}=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\}=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1)$$

解：先求 Y 关于 $X=x$ 的条件分布密度，

$$f_{Y|X=x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_2-\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1)\right]^2\right\}$$

即

$$f_{Y|X=x}(y|x)\sim N[\mu_2+\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)]$$

$$E\{Y|X=x\}=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X=x}(y|x)dy=\mu_2+\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\}=\mu_2+\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(X-\mu_1)$$

说明：正态分布的期望就是其均值参数

条件数学期望

（3） 条件数学期望的性质

在各给定的随机变量的数学期望存在的条件下，我们有：

（a） $E\{X\} = E\{E\{X \mid Y\}\}$；

（b） $E\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \mid Y\right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E\{X_i \mid Y\}$ **a.s.** ； 其中α_i $(1 \le i \le n)$为常数；

（c） $E\{g(X)h(Y) \mid Y\} = h(Y)E\{g(X) \mid Y\}$ **a.s.** ；

（d） $E\{g(X)h(Y)\} = E\{h(Y)E\{g(X) \mid Y\}\}$；

（e） 如果X, Y独立，则有 $E\{X \mid Y\} = E\{X\}$；

条件数学期望

证明：设$(X,Y)\sim f(x,y)$，则有：

$$E\{g(X)h(Y)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx\right]h(y)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E\{g(X)\mid Y=y\}h(y)f_Y(y)dy=E\{h(Y)E\{g(X)\mid Y\}\}$$

注 **1**：常用的计算式子：

$$E\{g(X)h(Y)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}E\{g(X)\mid Y=y\}h(y)f_Y(y)dy$$

$$P\{A\}=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{A\mid Y=y\}f_Y(y)dy$$ 全概率公式

$$P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{X\le x\mid Y=y\}f_Y(y)dy$$ 全概率公式的另一种形式

随机过程举例

例 a：如果正弦波随机过程为

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

其中振幅 A 取常数，角频率 ω 取常数，而相位 θ 是一个随机变量，它均匀分布于 $(-\pi, \pi)$ 之间，即：

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求在 t 时刻 $X(t)$ 的概率密度。

随机过程举例

例 a：如果正弦波随机过程为

$$X(t)=A\cos(\omega t+\theta)$$

其中振幅 A 取常数，角频率 ω 取常数，而相位 θ 是一个随机变量，它均匀分布于 $(-\pi,\pi)$ 之间，即：

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi\le x\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求在 t 时刻 $X(t)$ 的概率密度。

解：固定时刻 t，则随机变量 $X(t)=A\cos(\omega t+\theta)$ 是随机变量 θ 的函数。

由分布函数的定义：

$$F_{X(t)}(y)=P\{X(t)\le y\}=P\{A\cos(\omega t+\theta)\le y\}$$

当 $y<-A$ 时，$F_{X(t)}(y)=0$；当 $y\ge +A$ 时，$F_{X(t)}(y)=1$

当 $-A\le y<+A$ 时，我们有：

$$F_{X(t)}(y)=P\{X(y)\le y\}=P\{A\cos(\omega t+\theta)\le y\}=$$

$$=P(\{-\pi<\theta\le\omega t-\arccos\frac{y}{A}\}\cup\{\arccos\frac{y}{A}-\omega t<\theta\le\pi\})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\omega t-\arccos\frac{y}{A}}dx+\int_{\arccos\frac{y}{A}-\omega t}^{\pi}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\omega t-\arccos\frac{y}{A}+\pi+\pi-\arccos\frac{y}{A}+\omega t\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\omega t+\pi-\arccos\frac{y}{A}\right]$$

因此，当 $-A\le y<+A$ 时，$X(t)$ 的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y)=F'_{X(t)}(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-y^2}}$$

最终得到 $X(t)$ 的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-y^2}}, & -A\le y\le +A\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

随机过程举例

例 **b**：设一由正弦振荡器输出的随机过程：

$$X(t)=A\cos(\Omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 A、Ω 和 θ 是相互独立的随机变量，并且已知它们的分布密度函数分别为：

$\Omega\sim U(250,350)$、$\theta\sim U(0,2\pi)$ 及

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2}, & a\in(0,A_0)\\ 0, & a\notin(0,A_0)\end{cases}$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。

随机过程举例

例 **b**：设一由正弦振荡器输出的随机过程：

$$X(t)=A\cos(\Omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 A、Ω 和 θ 是相互独立的随机变量，并且已知它们的分布密度函数分别为：

$\Omega\sim U(250,350)$、$\theta\sim U(0,2\pi)$ 及

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2}, & a\in(0,A_0)\\ 0, & a\notin(0,A_0)\end{cases}$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。

解：设 $Y(t)=a\cos(\omega t+\theta)$,其中 a 和 ω 是常数，$\theta\sim U(0,2\pi)$，由例 **a** 的结果可知 $Y(t)$ 的一维分布密度为：

$$f_{Y(t)}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & -a\le y\le +a\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

比较 $X(t)$ 与 $Y(t)$，我们有：

$$Y(t)=X(t\,|\,A=a,\Omega=\omega)$$

由连续型全概率公式，我们有：

$$P\{X(t)\le x\}=\iint P\{X(t)\le x\,|\,A,\Omega\}dF(a,\omega)$$

由于 A,Ω 相互独立，因此有：

$$dF(a,\omega)=f(a,\omega)da\,d\omega=f_A(a)f_\Omega(\omega)da\,d\omega$$

注 **1**：常用的计算式子：

$$E\{g(X)h(Y)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}E\{g(X)\,|\,Y=y\}h(y)f_Y(y)dy$$

$$P\{A\}=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{A\,|\,Y=y\}f_Y(y)dy$$

$$P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{X\le x\,|\,Y=y\}f_Y(y)dy$$

随机过程举例

例 b：设一由正弦振荡器输出的随机过程：

$$X(t)=A\cos(\Omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 A、Ω 和 θ 是相互独立的随机变量，并且已知它们的分布密度函数分别为：

$\Omega\sim U(250,350)$、$\theta\sim U(0,2\pi)$ 及

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2}, & a\in(0,A_0)\\ 0, & a\notin(0,A_0)\end{cases}$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。

由连续型全概率公式，我们有：

$$P\{X(t)\le x\}=\iint P\{X(t)\le x \mid A,\Omega\}dF(a,\omega)$$

由于 A,Ω 相互独立，因此有：

$$dF(a,\omega)=f(a,\omega)dad\omega=f_A(a)f_\Omega(\omega)dad\omega$$

故有 $X(t)$ 的一维概率密度为：

$$f_{X(t)}(x)=\iint\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}f_A(a)f_\Omega(\omega)dad\omega=$$

$$=\int_x^{A_0}da\int_{250}^{350}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{2a}{A_0^2}\cdot\frac{1}{100}d\omega$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi A_0^2}\sqrt{A_0^2-x^2}, & |x|\le A_0\\ 0, & |x|>A_0\end{cases}$$

随机过程举例

例 c：（一维随机游动）设有一质点在 x 轴上作随机游动，即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点，在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为 p 和 $q=1-p$。经时间 n，质点偏离原点的距离为 k，问经时间 n 步后，质点处于位置 k 的概率如何？

随机过程举例

例 c：（一维随机游动）设有一质点在 x 轴上作随机游动，即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点，在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为 p 和 $q=1-p$。经时间 n，质点偏离原点的距离为 k，问经时间 n 步后，质点处于位置 k 的概率如何？

解：设质点第 i 次移动时的距离为 ξ_i，则 ξ_i 是离散的随机变量，它可取＋1，也可取－1。且 $P\{\xi_i=+1\}=p$，$P\{\xi_i=-1\}=1-p=q$

设：质点在 $t=n$ 时，偏离原点的距离为 X_n，则 X_n 也是一随机变量，且有：

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \qquad X_0=0$$

由题意，ξ_i 与质点所处位置无关，且 ξ_i 与 ξ_k（$i\neq k$）独立。

随机过程举例

例 c：（一维随机游动）设有一质点在 x 轴上作随机游动，即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点，在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为 p 和 $q=1-p$。经时间 n，质点偏离原点的距离为 k，问经时间 n 步后，质点处于位置 k 的概率如何？

当 $t=n$ 时，质点可取的值为:

$$n, n-2, n-4, \cdots, -(n-4), -(n-2), -n$$

如果在 n 次游动中有 m 次质点右向移动一个单位，即有 m 次 $\xi_i=+1$ 发生，

则有 $n-m$ 次质点左向移动一个单位，即有 $n-m$ 次 $\xi_i=-1$ 发生，此时有：

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i=m\times(+1)+(n-m)\times(-1)=2m-n=k$$

由此得到 $m=\dfrac{n+k}{2}$。

随机过程举例

例 c：（一维随机游动）设有一质点在 x 轴上作随机游动，即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点，在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为 p 和 $q=1-p$。经时间 n，质点偏离原点的距离为 k，问经时间 n 步后，质点处于位置 k 的概率如何？

由此得到 $m=\dfrac{n+k}{2}$。

因此，由题意，我们有：

$$P\{X_n=k\}=C_n^m p^m q^{n-m}=C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}=\frac{n!}{(\frac{n+k}{2})!(\frac{n-k}{2})!}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}$$

此式中 m 是一正整数，则如果 n 为奇数时，k 也是奇数 $(k<n)$；如果 n 为偶数时，k 也是偶数 $(k<n)$。

随机过程举例

例 **d**：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

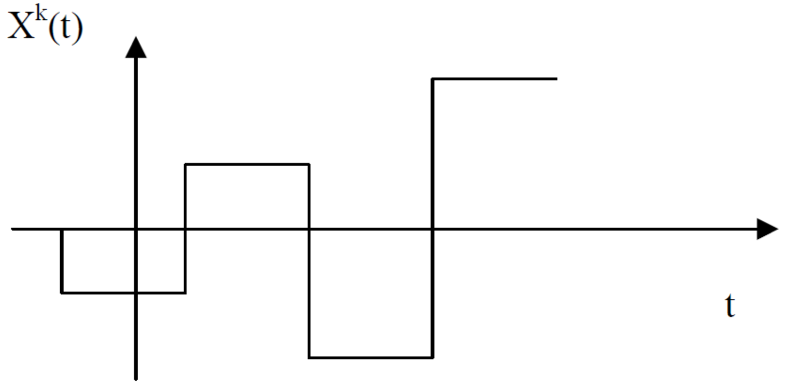
不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差 u 为均匀分布在 $(0,T_0)$ 内的随机变量。试求在两个时刻 t_1 ,t_2 时，随机过程 $X(t)$ 所取值 $(X(t_1),X(t_2))$ 的二维联合概率密度。

随机过程举例

例 **d**：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。试求在两个时刻t_1,t_2时，随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。



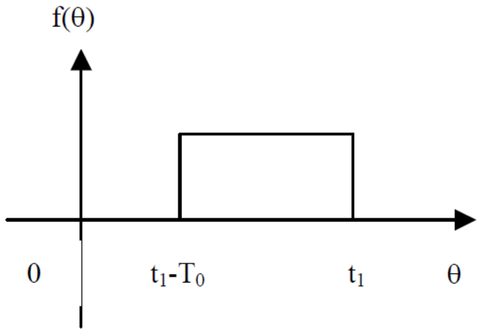
在时间轴上任意固定两个时刻t_1,t_2，我们令：

事件C：t_1,t_2间有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在不同的脉冲周期内；

事件C^c：t_1,t_2间没有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在相同的脉冲周期内；

（1） 当$|t_1-t_2|>T_0$时，有$P\{C\}=1$ 和 $P\{C^c\}=0$

（2） 当$|t_1-t_2|\le T_0$时，t_1,t_2可能处在同一脉冲内，也可能不处在同一脉冲内。假设θ为t_1所在的脉冲的起始时刻，由于脉冲的起始时刻相对于原点$t=0$的时间差u是$(0,T_0)$内的均匀分布，而且该信号是等宽的脉冲信号，因此θ可以看作均匀分布于(t_1-T_0,t_1)的随机变量。



随机过程举例

例 d：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，每隔T_0送出一个脉冲。脉冲幅度$X(t)$是一随机变量，它可取四个值$\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。试求在两个时刻t_1,t_2时，随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

事件C：t_1,t_2间有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在不同的脉冲周期内；

事件C^c：t_1,t_2间没有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在相同的脉冲周期内；

如果$t_1<t_2$，则：

$$P\{C^c\}=P\{t_2<\theta+T_0\}=P\{\theta>t_2-T_0\}=1-P\{\theta<t_2-T\}$$

$$=1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-T_0}d\theta=1-\frac{t_2-t_1}{T_0}$$

如果$t_1>t_2$，则：$P\{C^c\}=P\{t_2>\theta\}=\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2}d\theta=1-\frac{t_1-t_2}{T_0}$

因此有： $P\{C^c\}=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$ $P\{C\}=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$

随机过程举例

例 d：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值$\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差 u 为均匀分布在 $(0,T_0)$ 内的随机变量。试求在两个时刻 t_1,t_2 时，随机过程 $X(t)$ 所取值 $(X(t_1),X(t_2))$ 的二维联合概率密度。

事件C：t_1,t_2间有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在不同的脉冲周期内；

事件C^c：t_1,t_2间没有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在相同的脉冲周期内；

由全概率公式：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=f_{X_{t_1}X_{t_2}|C}(x_1,x_2|C)P\{C\}+f_{X_{t_1}X_{t_2}|C^c}(x_1,x_2|C^c)P\{C^c\}$$

根据不同周期内脉冲幅度是相互独立的随机变量，我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}|C}(x_1,x_2|C)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right]$$

如果t_1,t_2处在同一周期内，则$X_{t_1}=X_{t_2}$，此时有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}|C^c}(x_1,x_2|C^c)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\delta(x_2-i)\right]$$

随机过程举例

例 d：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。试求在两个时刻t_1,t_2时，随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

由此最终得到$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度如下：

当$|t_1-t_2|\le T_0$时：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right]\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$
$$+\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\delta(x_2-i)\right]\left(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right)$$

当$|t_1-t_2|>T_0$时：$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right]$

随机过程举例

例 e：设有某通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，脉冲信号的周期为T_0。如果脉冲幅度$X(t)$是随机的，幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，不同周期内的的幅度是相互统计独立的。脉冲沿的位置也是随机的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。u和脉冲幅度间也是相互统计独立的（脉冲幅度调制信号），试求在两个时刻t_1 ,t_2时，该随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

随机过程举例

例 e：设有某通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，脉冲信号的周期为T_0。如果脉冲幅度$X(t)$是随机的，幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，不同周期内的的幅度是相互统计独立的。脉冲沿的位置也是随机的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。u和脉冲幅度间也是相互统计独立的（脉冲幅度调制信号），试求在两个时刻t_1,t_2时，该随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

解：在时间轴上任意固定两个时刻t_1,t_2，讨论同例 **d**。

特别注意此时的状态空间！

（**a**） 当$|t_1-t_2|>T_0$时，t_1,t_2位于不同的周期内，此时我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}$$

（**b**） 当$|t_1-t_2|\le T_0$时，t_1,t_2位于两个不同的周期内的概率为：

$$P\{C\}=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

t_1,t_2位于相同的周期内的概率为：

$$P\{C^c\}=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

根据全概率公式，我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{|t_1-t_2|}{T_0}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\}\delta(x_1-x_2)\cdot\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right]$$

因为当t_1,t_2处在同一脉冲周期时，$X(t_1),X(t_2)$取相同的值，所以上式的第二项出现了$\delta(x_1-x_2)$函数。

此例中看出，$X(t_1),X(t_2)$的二维联合概率密度不再是二维正态分布，虽然$X(t_1)$和$X(t_2)$都是正态分布。

随机过程举例

例 **f**：考察一随机过程，它在$t_0 + nT_0$时刻具有宽度为b的矩形脉冲波，脉冲幅度A为一等概率取值$\pm a$的随机变量，且$b < T_0$，t_0是在$(0, T_0)$上服从均匀分布的随机变量，并且脉冲幅度A与t_0独立，试求该过程的相关函数和方差。

随机过程举例

例 f：考察一随机过程，它在 $t_0 + nT_0$ 时刻具有宽度为 b 的矩形脉冲波，脉冲幅度 A 为一等概率取值 $\pm a$ 的随机变量，且 $b < T_0$，t_0 是在 $(0, T_0)$ 上服从均匀分布的随机变量，并且脉冲幅度 A 与 t_0 独立，试求该过程的相关函数和方差。

解：由给定的随机过程，我们有：

$$E\{X(t)\} = a \times p + (-a) \times p + 0 \times (1-2p) = 0$$

下面求相关函数：

任意取 t_1, t_2，且 $t_1 < t_2$，当 $|t_1 - t_2| > T_0$ 时，t_1, t_2 位于不同的周期内，此时有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} = 0$$

当 $|t_1 - t_2| \le T_0$，且 t_1, t_2 位于两个不同的周期内时，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\} = 0$$

当 $|t_1 - t_2| \le T_0$，且 t_1, t_2 位于同一的周期内时，假设 θ 为 t_1 所在的脉冲的起始时刻，只有当 $t_2 < \theta + b$ 时，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 取到不为零的值，此时的概率为：

$$P\{t_2 < \theta + b\} = 1 - P\{\theta < t_2 - b\} = 1 - \frac{1}{T_0}\int_{t_1 - T_0}^{t_2 - b} d\theta = \frac{b - (t_2 - t_1)}{T_0}$$

由此，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = a^2 \cdot \frac{b - (t_2 - t_1)}{T_0}$$

同理，当 $t_1 > t_2$ 是，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = a^2 \cdot \frac{b - (t_1 - t_2)}{T_0}$$

因此，最终得到：

$$R_X(\tau) = \frac{a^2(b - |\tau|)}{T_0}, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad D_X(t) = R_X(0) = \frac{a^2 b}{T_0}$$

随机过程举例

例 **g**：随机电报信号定义如下：

（**1**）在任何时刻t，$X(t)$取值为 **0** 或 **1**，只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2\,,\,P\{X(t)=1\}=1/2$$

（**2**）每个状态的持续时间是随机的，设在T时间内波形变化的次数μ服从

Poission 分布即：

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad(\lambda>0,T>0)$$

（**3**）$X(t)$取何值（即所处的状态）与随机变量μ是相互统计独立的。

求随机电报信号$X(t)$的均值函数和自相关函数。

随机过程举例

例 g：随机电报信号定义如下：

（1）在任何时刻 t ，$X(t)$ 取值为 **0** 或 **1**，只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2\,,\ P\{X(t)=1\}=1/2$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，设在 T 时间内波形变化的次数 μ 服从 **Poission** 分布即：

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad(\lambda>0,T>0)$$

（3）$X(t)$ 取何值（即所处的状态）与随机变量 μ 是相互统计独立的。

求随机电报信号 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数。

解：由均值函数和自相关函数的定义，有：

（1） 均值函数：$E\{X(t)\}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，即均值函数是常数。

（2） 相关函数：在时间轴上任意固定两个时刻 t_1,t_2，如果 $t_2>t_1$，则

$$\begin{aligned}R_{XX}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=&\boxed{1\times1P\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}}+\\&+0\times1P\{X(t_1)=0,X(t_2)=1\}+1\times0P\{X(t_1)=1,X(t_2)=0\}\\&+0\times0P\{X(t_1)=0,X(t_2)=0\}\end{aligned}$$

这有这一项，其他都是0

随机过程举例

例 g：随机电报信号定义如下：

（1）在任何时刻 t， $X(t)$ 取值为 0 或 1，只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2\,,\,P\{X(t)=1\}=1/2$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，设在 T 时间内波形变化的次数 μ 服从 Poission 分布即：

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad(\lambda>0,T>0)$$

（3） $X(t)$ 取何值（即所处的状态）与随机变量 μ 是相互统计独立的。

求随机电报信号 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数。

下面求 $P\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}$。由于事件：$\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}$ 等价于事件：$\{X(t_1)=1,\text{在}t_2-t_1\text{时间内波形发生偶数次变化}\}$，即等价于事件：$\{X(t_1)=1,\ \mu=\text{偶数}\}$，故：

$$\begin{aligned}R_{XX}(t_1,t_2)&=P\{X(t_1)=1,\ \mu=\text{偶数}\}\\&=P\{X(t_1)=1\}P\{\mu=\text{偶数}\}\\&=\frac{1}{2}P\{\mu=\text{偶数}\}=\frac{1}{2}\sum_{k=\text{偶数}}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}++\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}]\\&=\frac{1}{4}e^{-\lambda(t_2-t_1)}[e^{\lambda(t_2-t_1)}+e^{-\lambda(t_2-t_1)}]=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}]\end{aligned}$$

随机过程举例

例 g：随机电报信号定义如下：

（1）在任何时刻 t，$X(t)$ 取值为 **0** 或 **1**，只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2\,,\,P\{X(t)=1\}=1/2$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，设在 T 时间内波形变化的次数 μ 服从 **Poission** 分布即：

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad(\lambda>0,T>0)$$

（3）$X(t)$ 取何值（即所处的状态）与随机变量 μ 是相互统计独立的。

求随机电报信号 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数。

同理，如果 $t_2<t_1$，则有

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{2\lambda(t_2-t_1)}]$$

故有：

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|t_1-t_2|}]$$

因此有：

$$C_{XX}(t_1,t_2)=R_{XX}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))$$
$$=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$$

随机过程举例

例 g：随机电报信号定义如下：

（1）在任何时刻t，$X(t)$取值为 0 或 1，只有两种可能状态。并设

$$P\{X(t)=0\}=1/2,\ P\{X(t)=1\}=1/2$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，设在T时间内波形变化的次数μ服从 **Poission** 分布即：

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad(\lambda>0,T>0)$$

（3）$X(t)$取何值（即所处的状态）与随机变量μ是相互统计独立的。

求随机电报信号$X(t)$的均值函数和自相关函数。

设时间差$\tau=t_1-t_2$，则有

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|\tau|}]$$

$$C_{XX}(t_1,t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

因为随机电报信号$X(t)$的均值函数为常数，相关函数仅为时间差的函数，故随机电报信号是宽平稳过程。

复随机过程

定义：设 X, Y 为同一概率空间 (Ω, Σ, P) 上的两个取实数值的随机变量，并设 $Z = X + jY$，则称 Z 为该概率空间上的一个复随机变量。

我们有：

$$E\{Z\} = E\{X\} + jE\{Y\}$$

$$D\{Z\} = E\{\left| Z - E\{Z\} \right|^2\} = E\{[Z - E\{Z\}]\overline{[Z - E\{Z\}]}\}$$

$$= E\{(X - EX)^2\} + E\{(Y - EY)^2\}$$

复随机过程

定义：设$\{X(t)\}$和$\{Y(t)\}$是具有相同参数和概率空间的一对实随机过程，

则$Z(t)=X(t)+jY(t)$称为复随机过程。

同样有：

$E\{Z(t)\}=E\{X(t)\}+jE\{Y(t)\}$，称为均值函数。

$R_{ZZ}(t_1,t_2)\triangleq E\{Z(t_1)\overline{Z(t_2)}\}=E\{[X(t_1)+jY(t_1)][\overline{X(t_2)+jY(t_2)}]\}$，称为复随机过程的相关函数。

复随机过程

例 8：设有复随机过程 $\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$ ，其中 η_k $(1\le k\le N)$ 是相互独立的随机变量，且服从正态分布 $N(0,\sigma_k^2)$，ω_k 为常数。试求 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数。

复随机过程

> 例 8：设有复随机过程$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中$\eta_k$ $(1\le k\le N)$是相互独立的随机变量，且服从正态分布$N(0,\sigma_k^2)$，ω_k为常数。试求$\xi(t)$的均值函数和相关函数。

解：由于：

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos(\omega_k t)+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin(\omega_k t)$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\}=E\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}\}=E\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos(\omega_k t)+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin(\omega_k t)\}=0$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}=E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_k\eta_i e^{j\omega_k t_1-j\omega_i t_2}\right\}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1-t_2)}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k\tau}$$

其中$\tau=t_1-t_2$。

注意：均值为零，相关函数是时间差的函数，是宽平稳过程。

课后习题

1、设随机向量(X,Y)的两个分量相互独立，且均服从标准正态分布$N(0,1)$。

（a）分别写出随机变量$X+Y$和$X-Y$的分布密度

（b）试问： $X+Y$与$X-Y$是否独立？说明理由。

2、设X和Y为独立的随机变量，期望和方差分别为μ_1,σ_1^2和μ_2,σ_2^2。

（a）试求$Z=XY$和X的相关系数；

（b）Z与X能否不相关？能否有严格线性函数关系？若能，试分别写出条件。

课后习题

3、设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个实的均值为零，二阶矩存在的随机过程，其相关函数为 $E\{X(s)X(t)\} = B(t-s), s \leq t$，且是一个周期为 T 的函数，即 $B(\tau+T) = B(\tau), \tau \geq 0$，试求方差函数 $D[X(t) - X(t+T)]$。

4、考察两个谐波随机信号 $X(t)$ 和 $Y(t)$，其中：

$$X(t) = A\cos(\omega_c t + \phi), \quad Y(t) = B\cos(\omega_c t)$$

式中 A 和 ω_c 为正的常数；ϕ 是 $[-\pi, \pi]$ 内均匀分布的随机变量，B 是标准正态分布的随机变量。

（a）求 $X(t)$ 的均值、方差和相关函数；

（c）　若 ϕ 与 B 独立，求 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数。

课后习题

5、设 $\xi(t) = X\sin(Yt); t \geq 0$，而随机变量 X 、Y 是相互独立且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。

6、设随机向量 $X = (X_1, X_2)^\tau = (\mu, \Sigma)^\tau$，其中：$\mu = (\mu_1, \mu_2)^\tau = (1, 2)^\tau$，$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 \\ 4/5 & 1 \end{pmatrix}$，

令随机向量 $Y = (Y_1, Y_2)^\tau = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X$。

（a） 试求随机向量 Y 的协方差矩阵、$E\{Y_2 | Y_1\}$ 及 $E\{Y_1 + Y_2\}$；

（b） 试问 $X_2 - E\{X_2 | X_1\}$ 与 X_1 是否独立？证明你的结论。

第1.4节*：预备知识

- 概率
- 随机变量
- 期望值
- 矩母函数、特征函数、Laplace变换
- 条件期望

概率

在概率论中的一个基本概念是随机试验，这种试验的结果不能预先确定．一个试验所有可能的结果的集合称为此试验的样本空间，而我们将它记为 S.

事件是样本空间的一个子集，如果此试验的结果是这个子集的一个元素，则称这个事件发生了．我们假定对于样本空间 S 的每个事件 E，定义了一个数 $P(E)$，它满足下述三条公理[⊖].

公理（1）　$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$.

公理（2）　$P(S)=1$.

公理（3）　对于任意相互排斥的事件序列 $E_1, E_2, \cdots$，即对于当 $i \neq j$ 时 $E_iE_j=\varnothing$（此处 $\varnothing$ 是空集合）的事件，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

我们将称 $P(E)$ 为事件 E 的概率.

概率

公理（1），（2）和（3）的一些简单推论如下.

1.1.1 若 $E \subset F$，则 $P(E) \leqslant P(F)$.

1.1.2 $P(E^c) = 1 - P(E)$，其中 E^c 是 E 的补.

- **1.1.3** $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$，当各个 E_i 相互排斥时.
- **1.1.4** $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

不等式（1.1.4）是所谓的 Boole 不等式.

概率

概率函数 P 的一个重要的性质是：它是连续的．为了更精确地阐述这种性质，我们需要极限事件的概念，下面就来定义它．如果 $E_n \subset E_{n+1}, n \geq 1$，则称事件序列 $\{E_n, n \geq 1\}$ 为递增序列；如果 $E_n \supset E_{n+1}, n \geq 1$，则称事件序列 $\{E_n, n \geq 1\}$ 为递减序列．如果 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是事件的一个递增序列，那么我们定义一个新的事件，记为 $\lim\limits_{n \to \infty} E_n$，它定义为

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{，当 } E_n \subset E_{n+1}, n \geq 1.$$

同样，如果 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是事件的一个递减序列，那么 $\lim\limits_{n \to \infty} E_n$ 定义为

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \text{，当 } E_n \supset E_{n+1}, n \geq 1.$$

现在我们可以叙述下述结论.

命题 1.1.1 如果 $\{E_n, n \geqslant 1\}$ 是事件的一个递增或递减序列，那么

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

概率

证明 首先假设 $\{E_n, n \geqslant 1\}$ 是事件的一个递增序列，定义事件 $F_n, n \geqslant 1$ 为

$$F_1 = E_1,$$

$$F_n = E_n\left(\bigcup_1^{n-1} E_i\right)^c = E_n E_{n-1}^c, \quad n > 1.$$

也就是说，F_n 由 E_n 中不属于它之前的任意一个 $E_i, i < n$ 的那些点构成. 容易检查 F_n 是相互排斥的事件，它们使得对于一切 $n \geqslant 1$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad 和 \quad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

概率

于是

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \qquad （由公理(3)） \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{n} F_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n),
\end{aligned}
$$

它证明了当 $\{E_n, n \geqslant 1\}$ 递增时的结论.

概率

如果 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是一个递减序列，那么 $\{E_n^c, n \geq 1\}$ 是一个递增序列，因此

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c).$$

但是，因为 $\bigcup_1^\infty E_n^c = \left(\bigcap_1^\infty E_n\right)^c$，所以

$$1 - P\left(\bigcap_1^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(E_n)],$$

或者，等价地

$$P\left(\bigcap_1^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n),$$

这就证明了结果.

概率

命题 1.1.2　Borel-Cantelli 引理

以 $E_1, E_2, \cdots$ 记一个事件序列. 如果

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) < \infty,$$

那么

$$P\{\text{无穷多个 } E_i \text{ 发生}\} = 0.$$

概率

证明 有无穷多个 E_i 发生的事件，称为 $\limsup\limits_{i\to\infty} E_i$，可以表示为

$$\limsup_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i.$$

这得自，如果有无穷多个 E_i 发生，那么对于每个 n，$\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i$ 都发生，于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i$ 发生. 另一方面，如果 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i$ 发生，那么对于每个 n，$\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i$ 都发生，于是对于每个 n 至少有一个 E_i（$i \geqslant n$）发生，因此有无穷多个 E_i 发生.

因为 $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} E_i, n \geqslant 1$ 是一个递减的事件序列，由命题 1.1.1 推出

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} P(E_i) = 0,$$

于是就证明了结论. ◀

概率

对于 Borel-Cantelli 引理的逆定理，要求有独立性.

命题 1.1.3（Borel-Cantelli 引理的逆） 如果 $E_1, E_2, \cdots$ 是独立事件，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \infty,$$

那么

$$P\{\text{无穷多个 } E_i \text{ 发生}\} = 1.$$

随机变量

考虑一个有样本空间 S 的随机环境. 一个随机变量 X 是一个函数，它给 S 中的每一个结果都指定一个实数值. 对于任意实数集合 A，X 假定的值包含于 A 中的概率等于试验的结果包含于 $X^{-1}(A)$ 中的概率. 即

$$P\{X \in A\} = P(X^{-1}(A)),$$

其中 $X^{-1}(A)$ 是使得 $X(s) \in A$ 的一切点 $s \in S$ 组成的事件.

随机变量

对于任意的实数 x，随机变量 X 的分布函数 F 定义为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\in(-\infty,x]\}.$$

我们将 $1-F(x)$ 记为 $\overline{F}(x)$，所以

$$\overline{F}(x)=P\{X>x\}.$$

随机变量

如果一个随机变量 X 可能值的集合是可数的，则称它是离散的随机变量. 对于离散的随机变量，

$$F(x) = \sum_{y \leqslant x} P\{X = y\}.$$

如果存在一个函数 $f(x)$（称为概率密度函数），使得对于一切集合 B 有

$$P\{X \text{ 在 } B \text{ 中}\} = \int_B f(x) \mathrm{d}x,$$

则称随机变量 X 是连续的. 由于 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t$，由此推出

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x).$$

随机变量

两个随机变量 X 和 Y 的联合分布函数定义为

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}.$$

随机变量

X 和 Y 的分布函数，

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} \quad \text{和} \quad F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\},$$

可以利用概率算子的连续性质由 $F(x,y)$ 得到. 特别地，以 $y_n, n \geqslant 1$ 记趋向 ∞ 的一个递增序列. 那么因为事件序列 $\{X \leqslant x, Y \leqslant y_n\}, n \geqslant 1$ 是递增的，而且

$$\lim_{n \to \infty} \{X \leqslant x, Y \leqslant y_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leqslant x, Y \leqslant y_n\} = \{X \leqslant x\},$$

由连续性质推出

$$\lim_{n \to \infty} P\{X \leqslant x, Y \leqslant y_n\} = P\{X \leqslant x\},$$

或等价地

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y).$$

类似地

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y).$$

随机变量

如果对于一切的 x 和 y，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是独立的.

随机变量

如果存在一个函数 $f(x,y)$（称为联合概率密度函数），使得对于一切集合 A 和 B 有

$$P\{X\text{ 在 }A\text{ 中}, Y\text{ 在 }B\text{ 中}\} = \int_A \int_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x ,$$

则称随机变量 X 和 Y 是联合地连续的，

随机变量

任意一族随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布定义为

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n\}.$$

而且，如果

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

其中

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j \neq i}} F(x_1, \cdots, x_n).$$

则称这 n 个随机变量是独立的.

期望值

随机变量 X 的期望或均值，记为 $E[X]$，定义为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x & \text{若 } X \text{ 是连续的} \\ \displaystyle\sum_{x} xP\{X=x\} & \text{若 } X \text{ 是离散的}\end{cases} \tag{1.3.1}$$

如果此积分存在.

期望值

方程（1.3.1）同时也定义了 X 的任意函数（例如 $h(X)$）的期望. 因为 $h(X)$ 本身是一个随机变量，由方程（1.3.1）推出

$$E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F_h(x),$$

其中 F_h 是 $h(X)$ 的分布函数. 但是可证明此期望恒等于 $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{d}F(x)$. 即

$$E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{d}F(x). \tag{1.3.2}$$

期望值

随机变量 X 的方差定义为

$$\mathrm{Var}X = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X].$$

两个联合地分布的随机变量 X 和 Y 称为不相关的，若它们的协方差

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

是 0. 由此推出独立的随机变量是不相关的. 然而，其逆不一定正确.

期望值

期望的一个重要性质是随机变量和的期望等于它们期望的和.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]. \tag{1.3.3}$$

而方差的相应性质是

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathrm{Cov}(X_i, X_j). \tag{1.3.4}$$

矩母函数、特征函数、Laplace变换

X 的矩母函数定义为

$$\psi(t) = E[e^{tX}] = \int e^{tX} dF(x).$$

对 ψ 逐次求导，并计算在 $t=0$ 处的值，可得 X 的各阶矩. 即

$$\psi'(t) = E[Xe^{tX}].$$

$$\psi''(t) = E[X^2 e^{tX}]$$

$$\vdots$$

$$\psi^n(t) = E[X^n e^{tX}].$$

计算在 $t=0$ 处的值，得到

$$\psi^n(0) = E[X^n], \quad n \geq 1.$$

应注意，我们假定求导数和积分运算可交换是合理的. 这是通常遇到的情形.

矩母函数、特征函数、Laplace变换

离散概率分布	概率质量函数，$p(x)$	矩母函数，$\psi(t)$	均值	方差
二项分布，参数 n,p，$0\leqslant p\leqslant 1$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+(1-p))^n$	np	$np(1-p)$
Poisson 分布，参数 $\lambda>0$	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $x=0,1,\cdots$	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$	λ	λ
几何分布，参数 $0\leqslant p\leqslant 1$	$p(1-p)^{x-1}$ $x=1,2,\cdots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布，参数 r,p	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}x$ $=r,r+1,\cdots$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

矩母函数、特征函数、Laplace变换

连续概率分布	概率密度函数，$f(x)$	矩母函数，$\phi(t)$	均值	方差
(a, b) 上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x<b \\ 0, \quad \text{其他情形}\end{cases}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布，参数 $\lambda>0$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geqslant 0 \\ 0, \quad x<0\end{cases}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Gamma 分布，参数 (n, λ)，$\lambda>0$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0\end{cases}$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$	$\dfrac{n}{\lambda}$	$\dfrac{n}{\lambda^2}$
正态分布，参数 (μ, σ^2)	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $-\infty<x<\infty$	$\exp\left\{\mu t+\dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$	μ	σ^2
Beta 分布，参数 $a, b, a>0, b>0$	$cx^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0<x<1$, $c=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$		$\dfrac{a}{a+b}$	$\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

矩母函数、特征函数、Laplace变换

当矩母函数存在时，它唯一地确定分布。

这是十分重要的，因为它使我们能用随机变量的母函数描述其分布函数。

矩母函数、特征函数、Laplace变换

因为随机变量的矩母函数未必存在，所以用

$$\phi(t)=E[e^{itX}],\quad -\infty<t<\infty,$$

定义随机变量 X 的特征函数在理论上更为方便，其中 $i=\sqrt{-1}$. 可以证明 ϕ 永远存在，而且像矩母函数一样唯一地确定了 X 的分布.

我们也可定义随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合矩母函数为

$$\psi(t_1,\cdots,t_n)=E\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}t_jX_j\right\}\right],$$

或联合特征函数为

$$\phi(t_1,\cdots,t_n)=E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}t_jX_j\right\}\right].$$

可证明联合矩母函数（当它存在时）或联合特征函数唯一地确定了联合分布.

矩母函数、特征函数、Laplace变换

在处理只取非负值的随机变量时，有时用 Laplace 变换比用特征函数更方便. 分布 F 的 Laplace 变换定义为

$$\widetilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathrm{d}F(x).$$

此积分对复数 $s = a + bi$ 存在，其中 $a \geqslant 0$. 正如特征函数情形一样，Laplace 变换唯一地确定了分布.

我们也可对任意函数定义 Laplace 变换如下：函数 g 的 Laplace 变换，记为 $\widetilde{g}$，定义为

$$\widetilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathrm{d}g(x).$$

当此积分存在时，可证 $\widetilde{g}$ 确定 g 到加一个常数.

条件期望

如果 X 和 Y 都是离散的随机变量，那么对一切使 $P(Y=y)>0$ 的 y，在给定 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率质量函数定义为

$$P\{X=x \mid Y=y\}=\frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}.$$

给定 $Y=y$ 时，X 的条件分布函数定义为

$$F(x \mid y)=P\{X \leqslant x \mid Y=y\},$$

而给定 $Y=y$ 时，X 的条件期望定义为

$$E[X \mid Y=y]=\int x \mathrm{d} F(x \mid y)=\sum x P\{X=x \mid Y=y\}.$$

条件期望

如果 X 和 Y 有联合密度函数 $f(x,y)$，那么对于一切使 $f_Y(y)>0$ 的 y，在给定 $Y=y$ 时，X 的条件概率密度函数定义为

$$f(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

而在给定 $Y=y$ 时，X 的条件概率分布函数定义为

$$F(x \mid y)=P\{X \leqslant x \mid Y=y\}=\int_{-\infty}^{x} f(x \mid y)\mathrm{d}x.$$

在给定 $Y=y$ 时，X 的条件期望定义为

$$E[X \mid Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid y)\mathrm{d}x.$$

条件期望

让我们以 $E[X \mid Y]$ 记随机变量 Y 的函数：它在 $Y=y$ 处取 $E[X \mid Y=y]$．条件期望的一个极其有用的性质是：当期望存在时，对于一切随机变量 X 和 Y 有

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = \int E[X \mid Y=y]\mathrm{d}F_Y(y). \tag{1.5.1}$$

如果 Y 是离散的随机变量，那么方程（1.5.1）说明

$$E[X] = \sum_y E[X \mid Y=y]P\{Y=y\},$$

而如果 Y 是连续的，具有密度 $f(x)$，那么方程（1.5.1）表明

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y=y]f(y)\mathrm{d}y.$$

条件期望

现在我们就 X 和 Y 两者都是离散的随机变量时给出方程（1.5.1）的证明.

当 X 和 Y 都是离散随机变量时方程（1.5.1）的证明　要证明

$$E[X]=\sum_y E[X\mid Y=y]P\{Y=y\}.$$

我们将上式右边写为

$$\begin{aligned}\sum_y E[X\mid Y=y]P\{Y=y\}&=\sum_y\sum_x xP\{X=x\mid Y=y\}P\{Y=y\}\\&=\sum_y\sum_x xP\{X=x,Y=y\}=\sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\}\\&=\sum_x xP\{X=x\}=E[X].\end{aligned}$$

由此结论得证.

于是我们从方程（1.5.1）得出结论：$E[X]$ 是给定 $Y=y$ 时，X 的条件期望值的一个加权平均，其中每个项 $E[X\mid Y=y]$ 用取条件的事件的概率加权.